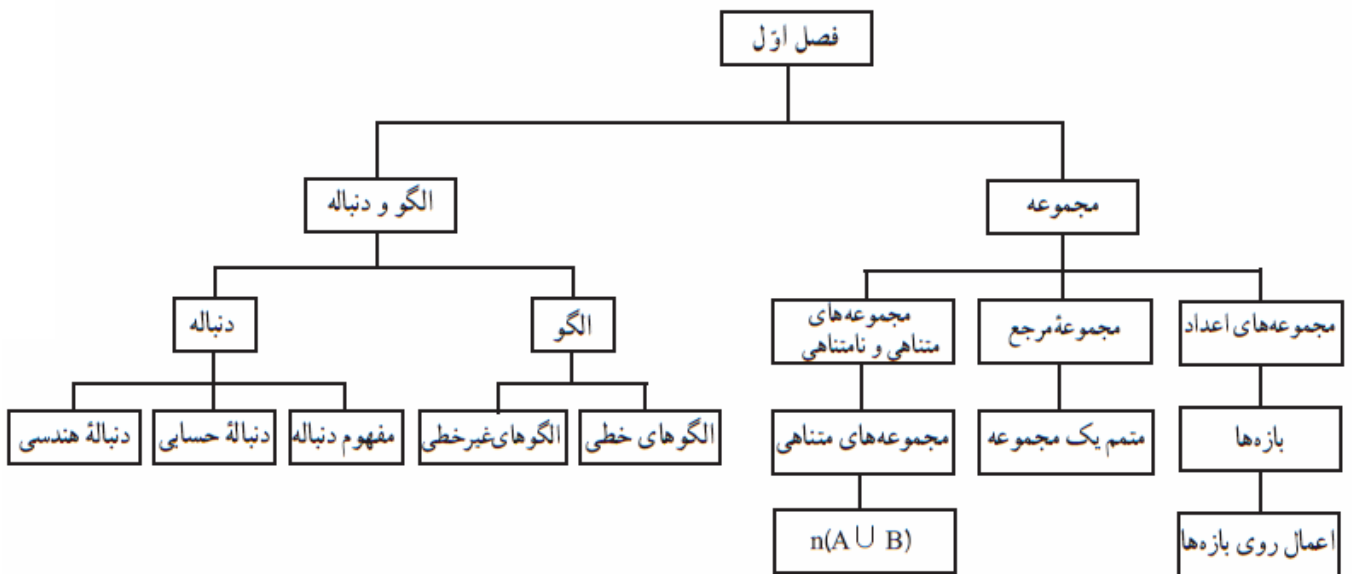


الله الرحمن الرحيم



آشنایی با مجموعه‌ها

مجموعه‌هایی که را در سال‌های قبل با آن آشنا شده‌اید با اعضا و یا به زبان ریاضی نمایش دهید.

$\mathbb{N}$  = مجموعه اعداد طبیعی

$\mathbb{R}$  = مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{W}$  = مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{O}$  = مجموعه اعداد طبیعی فرد

$\mathbb{Z}$  = مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{E}$  = مجموعه اعداد طبیعی زوج

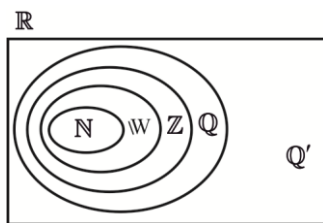
$\mathbb{Q}$  = مجموعه اعداد گویا

$\mathbb{Z}_O$  = مجموعه اعداد صحیح فرد

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  = مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{Z}_E$  = مجموعه اعداد صحیح زوج

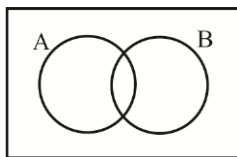
تمرین ۱. آیا می‌توان ارتباط بین مجموعه‌های فوق را به لحاظ نمودار ون به صورت زیر نمایش داد؟



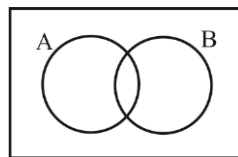
اعمال جبری روی مجموعه‌ها

تمرین ۲. طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را به نماد اعمال جبری روی مجموعه‌ها بنویسید و نمایش نمودار آن‌ها را با هاشور زدن کامل کنید.

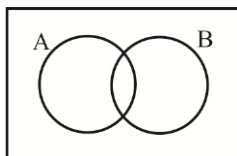
الف)  $\{x | x \in A \text{ or } x \in B\} = \dots\dots\dots$



پ)  $\{x | x \in A \text{ and } x \notin B\} = \dots\dots\dots$

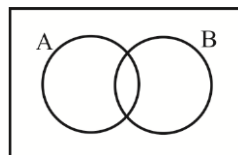


ب)  $\{x | x \in A \text{ and } x \in B\} = \dots\dots\dots$



$\{x | x \in A \cup B \text{ and } x \notin A \cap B\} = \dots\dots\dots$

ت)



تمرین ۳. حاصل هر یک از اعمال زیر را به دست آورید.

۱)  $W - N =$

۲)  $Z \cap Q =$

۳)  $Z - W =$

۴)  $Q' - N =$

۵)  $W - Q =$

۶)  $W - Z =$

۷)  $Z - N =$

۸)  $W \cup Q =$

۹)  $W \cap Q =$

۱۰)  $R \cup Q' =$

تمرین ۴. در بین اعداد زیر اعداد گنگ را مشخص کنید.

$\frac{2}{3}, \sqrt{5}, 3/12, \pi, \frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{-3}{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \sqrt{121}$

تمرین ۵. کدام یک از علائم  $\cap, \cup, \notin, \in, \not\subseteq, \subseteq, -, \Delta$  را می توان داخل هر مربع قرار داد؟

۱)  $3/\sqrt{7} \square Q$

۲)  $R \square Z$

۳)  $N \square Z \square Q \square R$

۴)  $Q \square Q' = R$

۵)  $Q \square Q' = \emptyset$

۶)  $R \square Q' = Q$

۷)  $(A \square B) - (A \square B) = A \square B$

۸)  $(A - B) \cup (B - A) = A \square B$

**بازه یا فاصله**

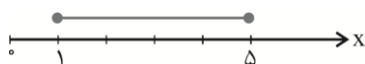
زیر مجموعه هایی از  $\mathbb{R}$  که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را بازه یا فاصله می نامیم. انواع بازه ها عبارتند از:

**۱- بازه های بسته**

به مجموعه همه اعداد حقیقی  $x$  که در نامساوی  $a \leq x \leq b$  صدق می کنند فاصله یا بازه ی بسته می گوئیم. دقت کنید که در این حالت باید هر دو سر بازه عضوی از بازه باشند.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

مثال ۱:  $[1, 5] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 5\}$



تمرین ۶. طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید و بازه را روی محور نمایش دهید.

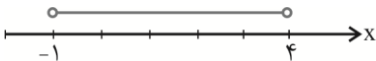
$$[-\sqrt{2}, \sqrt{10}] = \dots\dots\dots$$

**۲- بازه‌های باز**

به مجموعه همه اعداد حقیقی  $x$  که در نامساوی  $a < x < b$  قرار می‌گیرند فاصله باز می‌گوییم و آن را به صورت  $(a, b)$  نشان می‌دهیم. در این حالت نقاط ابتدایی و انتهایی بازه عضو آن نمی‌باشند.



مثال ۲:  $(-1, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$



تمرین ۷. مجموعه  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < \frac{x-1}{3} + 1 < 4\right\}$  را به صورت بازه نمایش داده و روی محور نشان دهید.

**۳- بازه‌های نیم باز (نیم بسته):**

بازه‌های نیم باز یا نیم بسته بازه‌هایی هستند که فقط یکی از دو سر بازه عضوی از بازه بوده و به یکی از دو حالت زیر می‌باشد:

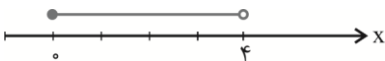
الف)  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

مثال ۳:  $(3, 8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 8\}$



ب)  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

مثال ۴:  $[0, 4) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$



**۴- بازه‌های بی کران**

در این حالت بازه باید حداقل از یکی از دو طرف بی کران باشد.

(۱)  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$  که از بالا بی کران است.

(۲)  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$  که از بالا بی کران است.

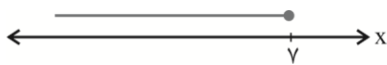
مثال ۵:  $(3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$



(۳)  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  که از پایین بی کران است.

(۴)  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

مثال ۶:  $(-\infty, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7\}$



تمرین ۸. مجموعه جواب نامعادله‌ها را به صورت بازه نمایش دهید.

a)  $2x - 1 \geq 0$

b) 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} < 2x-1 \\ x - \frac{2x}{3} \geq x-1 \end{cases}$$

تمرین ۹. نمایش هندسی هر یک از بازه‌های زیر را بر روی یک محور رسم و حاصل خواسته شده را تعیین کنید.

a)  $(-\infty, -2] \cup [-2, 0) =$

b)  $(-1, 4) \cup [-1, 2) =$

c)  $[0, 10] - [1, 4] =$

d)  $(-3, 4) - [0, 4] =$

e)  $(2, +\infty) \cap (3, 5] =$



برای تعیین اجتماع، اشتراک یا تفاضل بازه‌ها می‌توان از نمایش هندسی آن بازه‌ها بر روی محور اعداد حقیقی استفاده کرد.

تمرین ۱۰. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 10\}$  و  $C = \{x \in \mathbb{E} \mid x < 10\}$ ، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱)  $B - A =$

۲)  $A \cap B =$

۳)  $B \cup C =$

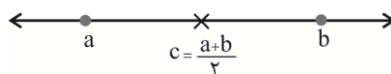
۴)  $A \cup (B \cap C) =$

تمرین ۱۱. اگر عبارت  $\frac{-1-7x}{5}$  در بازه‌ی  $(-\infty, 4]$  قرار گرفته باشد، حدود  $x$  را بنویسید.

تمرین ۱۲. مجموعه  $\mathbb{R} - W$  را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

### نقطه میانی بازه

تعریف نقطه‌ی میانی بازه‌ها: نقطه‌ای که از دو سر یک بازه به یک فاصله می‌باشد را نقطه‌ی میانی آن بازه می‌گوییم. برای مثال اگر  $c$  نقطه‌ی میانی بازه‌ی  $[a, b]$  باشد می‌توانیم آن را به صورت زیر تعریف و محاسبه کنیم.



تمرین ۱۳. نقطه‌ی میانی بازه‌ی  $\left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$  را بیابید.

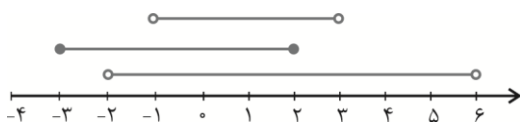
تمرین ۱۴. در صورتی که  $A = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  و  $B = (-2, 5]$  در این صورت  $A \cap B$  و  $A \cup B$  و  $B - A$  را

مشخص کنید.

تمرین ۱۵. اگر  $x \in (-\infty, a]$  در این صورت آیا می‌توان گفت که لزوماً  $x+1 \in (-\infty, a]$  درست است؟ در مورد  $(x-1)$  چه می‌توان گفت؟ چرا؟

تمرین ۱۶. اگر مجموعه  $[2m-1, m+1]$  یک بازه باشد حدود  $m$  را بیابید.

تمرین ۱۷. با توجه به شکل مقابل، اگر  $I_1$  را اجتماع بازه‌ها و  $I_2$  را اشتراک آن‌ها در نظر بگیریم.



الف)  $I_1$  و  $I_2$  را به صورت بازه نمایش دهید و آن را بر روی محور نشان دهید.

ب)  $I_1$  شامل چند عدد طبیعی و  $I_2$  شامل چند عدد صحیح است؟



پ)  $I_1 - I_2$  را به صورت بازه نمایش دهید و آن را بر روی محور نمایش دهید.

تمرین ۱۸. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را بررسی کنید.

۱)  $\frac{5}{3} \in \left[ \frac{2}{5}, 2 \right)$

۲)  $-3 \in (-3, 0]$

۳)  $1 \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$

۴)  $4 \in \{-4, 5\}$

۵)  $1 \in \{-1, 3\}$

۶)  $[-2, 2] \subseteq (-2, 2)$

۷)  $\{2, 3\} \subseteq [1, 4]$

۸)  $[2, 5] = [2, 5)$

مجموعه‌ی متناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است را مجموعه متناهی می‌نامیم. در غیر این صورت مجموعه را نامتناهی گوئیم. تعداد اعضای مجموعه‌های نامتناهی از هر عدد طبیعی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

تمرین ۱۹. سه مجموعه متناهی و سه مجموعه نامتناهی مثال بزنید.

تمرین ۲۰. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد صحیح زوج

ب) مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴

پ) بازه  $\left( \frac{1}{100}, \frac{1}{10} \right)$

ت)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$

ث) مجموعه مضارب طبیعی عدد ۱۰۰

تمرین ۲۱. الف) اگر  $A \subseteq B$  و B متناهی باشد، آنگاه A متناهی است یا نامتناهی؟

ب) اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  متناهی باشد، در مورد  $B$  چه می توان گفت؟

پ) اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  نامتناهی باشد در مورد متناهی یا نامتناهی بودن  $B$  چه می توان گفت؟

ت) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  نامتناهی باشد در مورد  $A$  چه می توان گفت؟

تمرین ۲۲. الف) اگر  $A$  متناهی و  $B$  نامتناهی باشد،  $A \cup B$  و  $A - B$  ....

ب) اگر  $A$  و  $B$  هر دو متناهی باشند، مجموعه های  $A \cup B$ ،  $A - B$  و  $A \cap B$  ...

پ) اگر  $A$  و  $B$  هر دو نامتناهی باشند، مجموعه  $A \cup B$  ..... ولی در مورد مجموعه های  $A - B$ ،  $B - A$  و  $A \cap B$  و

.....

### بیان ریاضی مجموعه ها

الگوی مشخص و یا روش یکسانی برای بیان ضابطه یک مجموعه به زبان ریاضی وجود ندارد و بستگی به خلاقیت، هوش و ابتکار عمل دارد. در نوشتن بیان ریاضی مجموعه ها باید به مجموعه ای مرجع که معمولاً یکی از مجموعه های  $\mathbb{Q}'$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{W}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  است، توجه شود.

تمرین ۲۳. اعضای هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

$$A = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{n^3 - n \mid n \in \mathbb{W}\}$$

$$C = \{n^2 + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{3n+2}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

تمرین ۲۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

$$A = \{0, 1, 3, 7, \dots\}$$

$$B = \{9, 99, 999, 9999, \dots\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots \right\}$$

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف مجموعه مرجع: مجموعه‌ای را که در مورد زیر مجموعه‌های آن بحث و بررسی می‌کنیم، مجموعه مرجع آن بحث می‌نامیم و آن را با  $U$  یا  $M$  نشان می‌دهیم.

تمرین ۲۵. اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید و علت تفاوت عضوها را بیان کنید.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$$

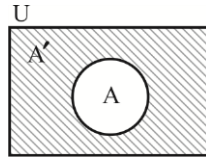
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 2\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{W}, -1 < x < 2\}$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 2\}$$

تعریف متمم یک مجموعه: هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$  آن گاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را نماد  $A^c$  یا  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل همه عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

$$A' = U - A = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$



تمرین ۲۶. در هر یک از موارد زیر با توجه به مجموعه مرجع داده شده، متمم مجموعه را بیابید.

۱)  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  ,  $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A' = ?$

۲)  $B = \{x \in \mathbb{Z} | -1 \leq x < 2\} \Rightarrow B' = ?$

۳)  $C = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 2\} \Rightarrow C' = ?$

### خواص اعمال جبری مجموعه‌ها

۱)  $A \cup A = A$

۲)  $A \cap A = A$

۳)  $A \cup \emptyset = A$

۴)  $A \cap \emptyset = \emptyset$

۵)  $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$ : خاصیت جابه‌جایی

۶)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  ,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ : خاصیت شرکت‌پذیری

۷)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  ,  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ : خاصیت توزیع‌پذیری یا پخش

۸)  $A - B = A \cap B'$

۹)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$  قوانین دمورگان

۱۰)  $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$  قوانین جذب

تمرین ۲۷. طرف دوم تساوی‌های زیر را بیابید.

۱)  $\emptyset' =$

۲)  $(A')' =$

۳)  $U' =$

۴)  $A \cap A' =$

۵)  $A \cup A' =$

۶)  $A - A' =$

۷)  $A' - A =$

۸)  $(A \cup B)' =$

۹)  $(A \cap B)' =$

۱۰)  $A \cap B' =$

۱۱)  $(A \cup B \cup C)' =$

۱۲)  $(A \cap B \cap C)' =$

تمرین ۲۸. اگر  $B \subseteq A$  و  $B' \subseteq A$ ، کدام گزینه مجموعه  $A$  است؟

- M (۱)  $\emptyset$  (۲) B (۳) B' (۴)

تمرین ۲۹. اگر  $A \subseteq B$  و  $A \subseteq B'$ ، کدام گزینه مجموعه  $A$  است؟

- M (۱)  $\emptyset$  (۲) B (۳) A' (۴)

تمرین ۳۰. اگر  $A \subseteq B$ ، نشان دهید که  $B' \subseteq A'$ .

تعریف عدد اصلی یا تعداد اعضای یک مجموعه

اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد آن گاه تعداد اعضای مجموعه  $A$  یا همان عدد اصلی  $A$  را با علامت  $n(A)$  یا  $|A|$  نشان می‌دهیم.

تمرین ۳۱. عدد اصلی هر مجموعه را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 10\} \Rightarrow n(A) = ?$$

$$n(B) = ? \Rightarrow \text{مجموعه اعداد اول دورقمی کم‌تر از } 50$$

از نمودار ون می‌توان برای محاسبه ساده‌ی تعداد اعضای مجموعه‌ها بدون نیاز به فرمول‌ها استفاده کرد.



تمرین ۳۲. با استفاده از نمودار ون نشان دهید که:

الف)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ب)  $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

پ) حال به کمک قسمت (الف) و قوانین مجموعه حاصل  $n(A \cup B \cup C)$  را تعیین و ثابت کنید.

تمرین ۳۳.  $n(A - B)$  و  $n(A \cup B)$  را چگونه می توان توصیف کرد؟

تمرین ۳۴. با فرض این که  $n(A) = 7$  و  $n(B) = 8$  و  $n(A \cup B) = 12$ . مطلوب است محاسبه  $n(A \cap B)$ .

تمرین ۳۵. با فرض این که  $n(U) = 100$  و  $n(A) = 70$  و  $n(B) = 50$  و  $n(A \cap B) = 30$ ، حاصل هر یک از موارد زیر را محاسبه کنید.

الف)  $n(A \cup B)$       ب)  $n(B' \cap A)$       ج)  $n(A' \cap B)$       د)  $n(A' \cap B')$

تمرین ۳۶. در یک کلاس ۳۲ نفری، ۲۵ نفر به فوتبال و ۱۸ نفر به والیبال علاقمند هستند. در این کلاس چند نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند؟

تمرین ۳۷. با استفاده از نمودار ون،  $n(A \Delta B)$  را محاسبه و توصیف کنید.

تمرین ۳۸. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟

۵ (۱)                      ۶ (۲)                      ۷ (۳)                      ۸ (۴)

تمرین ۳۹. تعداد مسافریں در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجریں برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند نفر نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

۳۷ (۱)                      ۵۳ (۲)                      ۴۵ (۳)                      ۴۳ (۴)

تمرین ۴۰. از ۱۰۰ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۴۵ نفر طرفدار تیم پرسپولیس، ۵۰ نفر طرفدار استقلال، ۵۵ نفر طرفدار تراکتورسازی، ۲۵ نفر طرفدار پرسپولیس و استقلال، ۳۰ نفر طرفدار استقلال و تراکتورسازی، ۳ نفر طرفدار تراکتورسازی و پرسپولیس و ۱۵ نفر طرفدار هر سه تیم هستند. هر یک از موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) چند نفر طرفدار هیچ تیمی نیستند؟

ب) چند نفر طرفدار پرسپولیس و استقلال می‌باشند اما طرفدار تراکتورسازی نیستند؟

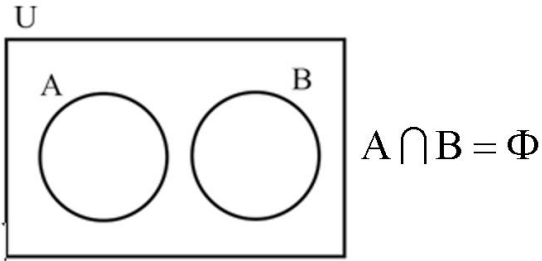
پ) چند نفر فقط طرفدار پرسپولیس هستند؟

ت) چند نفر حداکثر طرفدار یک تیم هستند؟

ث) چند نفر طرفدار حداقل دو تیم هستند؟

تعریف دو مجموعه جدا از هم (مجزا)

تعریف دو مجموعه جدا از هم (مجزا): دو مجموعه A و B را جدا از هم گوییم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد.



تمرین ۴۱. دو مجموعه جدا از هم نامتناهی بیابید.

تمرین ۴۲. اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم متناهی باشند، نشان دهید که:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

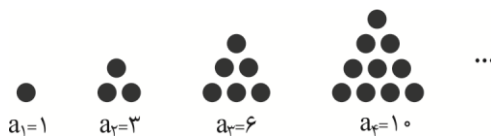
تمرین ۴۳. از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 200\}$  چند عضو مضرب ۴ یا مضرب ۹ هستند؟

تمرین ۴۴. چند عضو از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 150\}$ ، بر ۷ بخش پذیر هستند ولی بر ۱۱ بخش پذیر نیستند؟

### الگو و دنباله

تعریف الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که می تواند تکرار شونده یا

رشد کننده یا کاهنده و یا ترکیبی از آن ها باشد مانند الگوی زیر:

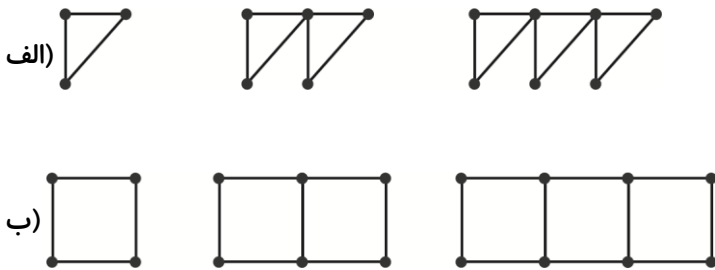




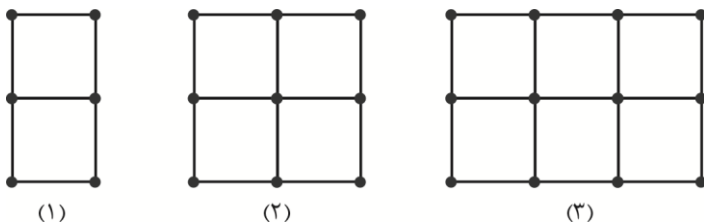
نکته: منظور از  $a_n$ ، جمله‌ی  $n$ ام یک الگو (و یا دنباله که در ادامه مطرح خواهیم کرد) است که آن‌ها را متغیرهای اندیس‌دار می‌نامیم برای مثال در شکل بالا منظور از  $a_n$ ، تعداد نقطه‌های شکل  $n$ ام است.

تمرین ۴۵. آیا می‌توانید الگوی کلی (یا جمله عمومی) تعداد نقاط در مرحله‌ی  $n$ ام را در الگوی بالا بیابید.

تمرین ۴۶. در شکل‌های زیر الگوی کلی تعداد چوب‌کبریت‌های مرحله‌ی  $n$ ام را بیابید.



مثال ۷: الگوی کلی برای تعداد چوب‌کبریت‌های زیر را بیابید.



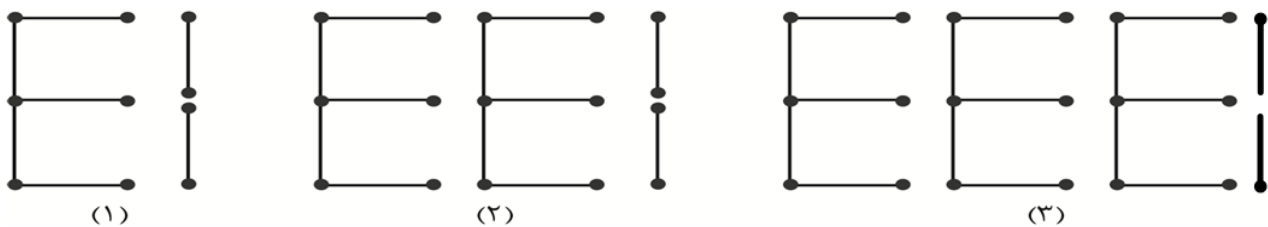
$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1(5) + 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2(5) + 2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3(5) + 2$$

---

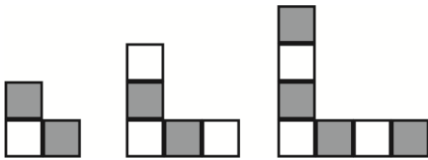

$$a_n = 5n + 2$$



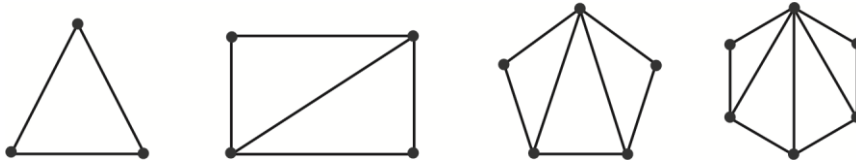
تمرین ۴۷. شکل‌های زیر با چوب‌کبریت ساخته شده‌اند.

الف) تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی  $n$ ام را بیابید.

ب) تعداد مربع‌های موجود در مرحله‌ی  $n$ ام را محاسبه کنید.



تمرین ۴۸. با تبدیل یک  $n$  ضلعی به تعدادی مثلث در درون آن که همگی در یک رأس مشترک هستند (مانند شکل‌های زیر) مجموع زوایای درونی یک  $n$  ضلعی محدب را محاسبه کنید.



تعریف دنباله: الگوهایی را که در آن‌ها تعدادی عدد پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم و این اعداد را جملات دنباله می‌نامیم. برای مثال:

دنباله اعداد طبیعی فرد متوالی:  $۱, ۳, ۵, ۷, \dots$

مثال ۸

دنباله اعداد طبیعی زوج متوالی:  $۲, ۴, ۶, ۸, \dots$

$$۱+۲=۲^۲-۱$$

تمرین ۴۹. تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$۱+۲+۴=۲^۳-۱$$

$$۱+۲+۴+۸=۲^۴-۱$$

الف) تساوی‌های مرتبط به سطر هفتم را حدس بزنید و درستی حدس خود را ثابت کنید.

.  
.  
.  
.  
.

ب) فرم‌های کلی این تساوی‌ها را بنویسید.

تمرین ۵۰. برای هر یک از دنباله‌های زیر یک الگو حدس بزنید و داخل مربع را پر کنید.

الف)  $۰, ۲, ۶, ۱۲, \square, \square, ۴۲, \dots$

ب)  $۵, ۷, ۱۰, ۱۴, \square, \square, \square, \square, \dots$

$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \dots$

همه دنباله‌ها لزوماً جمله عمومی ندارند. مثلاً دنباله‌ی اعداد اول یعنی:



برای پیدا کردن جمله عمومی دنباله‌ها، قانون مشخصی که بتواند برای همه دنباله‌ها کارساز باشد، وجود ندارد ولی با توجه به جمله‌های دنباله و اندیس آن‌ها، می‌توان به الگو بسیار نزدیک شد.

تمرین ۵۱. با توجه به الگوی داده شده در هر مرحله، جاهای خالی را پر کنید و جمله دهم هر دنباله را بیابید.

الف)  $-۲, ۳, -۴, ۵, \square, \square, \dots$   $a_n = (-1)^n \cdot (n+1)$

ب)  $-۱, -۴, \square, \square, \dots$   $d_n = ۲ - ۳n$

پ)  $۲, ۰, ۰, \square, \square, \dots$   $c_n = n^۲ - ۵n + ۶$

ت)  $۳, ۷, \square, ۴۳, \dots$   $b_n = ۲^n + ۳^{n-1}$

ث)  $-۱, -۱, -۱, ۱, \square, \square, \dots$   $t_n = \frac{|۲n - ۷|}{۲n - ۷}$

**تعریف الگوی خطی**

به‌طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  باشد الگوی خطی می‌نامیم. که در آن  $a, b$  اعداد حقیقی و ثابت هستند. در واقع الگوهای خطی، تفاضل هر جمله از جمله بعدی آن، عددی ثابت است که همان ضریب  $n$  یعنی  $a$  خواهد شد.

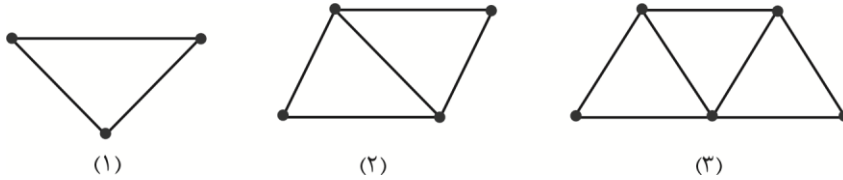
$t_n = ۳n + ۱$   $۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \dots$

مثال ۹

تمرین ۵۲. جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن  $c_۳ = ۲۳$  و  $c_۷ = ۴۳$ . جمله دهم این دنباله را بیابید.

تمرین ۵۳. اگر  $a_n$  یک جمله عمومی دنباله خطی باشد و جمله دوم آن برابر یک و  $a_۳ + a_۵ = ۱۴$ . جمله  $a_n$  را حساب کنید.

مثال ۱۰: الگوی خطی تعداد چوب کبریت‌های زیر را تعیین کنید.



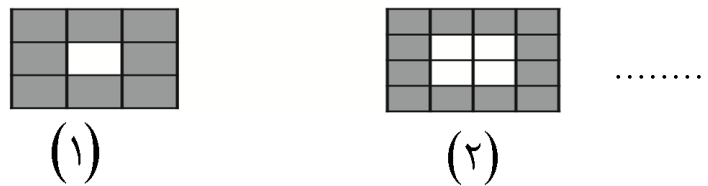
$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 = 2(1) + 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 = 2(2) + 1$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 7 = 2(3) + 1$$

$$a_n = 2n + 1$$

تمرین ۵۴. الگوی خطی متناظر با شکل‌های زیر را تعیین کنید. (تعداد مربعات رنگی)



تمرین ۵۵.

الف) اگر دنباله‌ی زیر الگوی خطی باشد، جاهای خالی را پر کنید.

$$\square, \square, -2, \square, \square, 13, \dots$$

ب) اکنون با قرار دادن  $n = 1$  و  $n = 2$  در ضابطه  $t_n = an^2 + bn + c$  و برابر قرار دادن حاصل آنها با اعداد داده شده  $t_1$  و  $t_2$ ، مقدار  $b$  و  $c$  را بدست آورید.

تمرین ۵۶. کدام جمله‌ی دنباله‌ی  $a_n = \frac{2^{n+1}}{4^n - 12}$  برابر با  $\frac{4}{13}$  است؟

تمرین ۵۷. جمله پنجم دنباله‌ی  $a_n = 5n^2 + 12$  با جمله هفتم دنباله‌ی  $b_n = 2n^2 - n + 1$  برابر است؟

تمرین ۵۸. در دنباله‌ی  $a_n = n^2 + 2n + 1$  مقدار جمله‌ی چهل و چهارم دنباله را بیابید.

تمرین ۵۹. جمله‌ی پنجم دنباله  $a_n = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$  برابر با ۷۱۶۸ است؟

تمرین ۶۰. در دنباله‌ی  $a_{2n+1} = 8n^2 - 4n + 3$  جمله‌ی  $n$ ام دنباله را بیابید.

### تعریف دنباله‌ی درجه دوم

دنباله‌هایی را که جمله‌ی عمومی آنها به صورت  $t_n = an^2 + bn + c$  باشد دنباله درجه دوم می‌نامیم که در آن  $a, b, c$  اعداد حقیقی و ثابت هستند و  $a \neq 0$ .

برای تعیین ضابطه‌ی یک دنباله‌ی درجه‌ی ۲ که جملات آن داده شده است به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) چون در هر دنباله‌ی درجه‌ی ۲، اعداد حاصل از تفاضل هر دو جمله متوالی یعنی  $t_{n+1} - t_n$ ، خود تشکیل یک دنباله‌ی خطی می‌دهند، مقدار  $a$  از تساوی زیر به دست می‌آید.

$$\text{اختلاف اختلاف‌ها} = \text{شیب خط} = 2a$$

(۲) حال با تشکیل  $t_1$  و  $t_2$  بر مبنای جملات اعداد داده شده رابطه‌ی کلی  $t_n$  به محاسبه‌ی  $b$  و  $c$  می‌پردازیم.

آیا می‌توان روشی برای تشخیص دنباله‌ی درجه‌ی دوم بودن یک دنباله از روی جملات آن ارائه کنید؟



۱: ضابطه‌ی دنباله‌ی درجه‌ی ۲ زیر را تعیین کنید.



$$\begin{array}{cccc} 3, & 13, & 29, & 51 \\ \hline & +10 & +16 & +22 \\ \hline & +6 & +6 & \end{array}$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow t_n = 3n^2 + bn + c$$

$$t_1 = 3 = 3(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow b + c = 0$$

$$t_2 = 13 = 3(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 2b + c = 1$$

$$\Rightarrow b = 1, c = -1 \Rightarrow t_n = 3n^2 + n - 1$$

تمرین ۶۱. جمله عمومی دنباله  $3, 11, 25, 45, \dots$  را به دست آورید.

تمرین ۶۲. برای دنباله زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی دنباله را بیابید.

$$3, 6, 11, 18, \dots$$

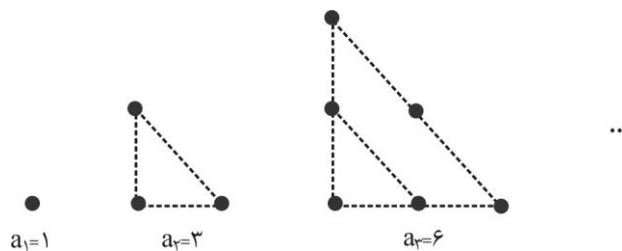
تمرین ۶۳. الگوی مقابل را در نظر بگیرید. شکل بعدی را رسم کنید و جمله عمومی الگو را بیابید.



دنباله‌های مهم درجه دوم:

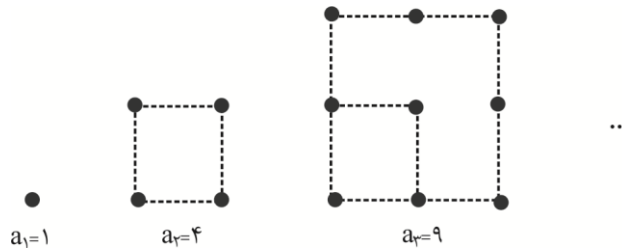
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الف) دنباله‌ی مثلثی

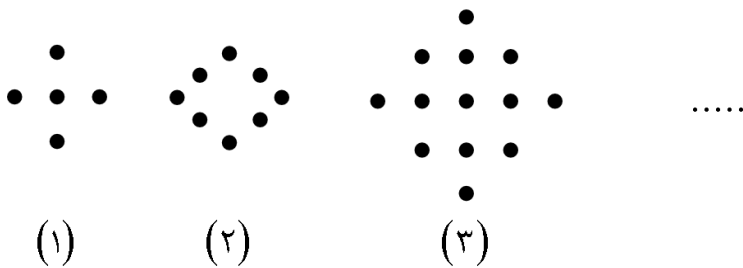


$$a_n = n^2$$

ب) دنباله‌ی مربعی



مثال ۱۲: تعداد نقاط در شکل ۲۰ام الگوی زیر را محاسبه کنید.



تمرین ۶۴. جمله‌ی بیستم دنباله‌ی مربعی چقدر بیش‌تر از جمله‌ی بیستم دنباله‌ی مثلثی است؟

تمرین ۶۵. یک الگوی هندسی برای دنباله‌ی زیر رسم کنید و سپس به کمک آن، جمله عمومی را بیابید.

۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ...

تعریف دنباله حسابی (عددی): دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از

خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدرنسبت دنباله می‌گویند.

اگر جمله‌ی اول را  $a$  و قدرنسبت را  $d$  فرض کنیم آن‌گاه جملات دنباله به صورت  $a, a+d, a+2d, \dots$  بود.

جمله‌ی عمومی آن به صورت  $a_n = a + (n-1)d$  خواهد شد.

نکته: توجه شود که هر دنباله‌ی حسابی خود یک الگوی خطی است که:

$$a_n = dn + a - d$$

مثال ۱۳: دنباله‌ی زیر، یک دنباله‌ی حسابی را نشان می‌دهد.

۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

در هر دنباله‌ی حسابی تفاضل هر جمله از جمله بعدی، برابر قدرنسبت دنباله است، یعنی:

$$d = a_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

تمرین ۶۶. کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی است؟ در هر مورد قدرنسبت ( $d$ ) را یافته و سپس سه جمله‌ی بعدی را نوشته و در صورت حسابی بودن، جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

الف)  $-۱, ۳, ۷, ۱۱, \square, \square, \square, \dots$

ب)  $۲, \frac{۵}{۲}, ۳, \square, \square, \square, \dots$

پ)  $۲, ۷, ۱۳, \square, \square, \square, \dots$

ت)  $۳, ۱, -۱, \square, \square, \square, \dots$

ث)  $۲ + \sqrt{۸}, ۳ + \sqrt{۲}, ۴, \square, \square, \square, \dots$

تمرین ۶۷. پنج جمله‌ی اول یک دنباله حسابی را بنویسید که در آن جمله اول  $a = ۳$  و قدرنسبت  $d = ۵$  باشد.

مثال ۱۴: در یک دنباله حسابی داریم:  $۸a + ۸۸d = ۸۸۸$ . جمله‌ی دوازدهم آن را بیابید.

$$۸a + ۸۸d = ۸۸۸ \Rightarrow a + ۱۱d = ۱۱۱ \Rightarrow a + (۱۲-۱)d = ۱۱۱ \Rightarrow a_{12} = ۱۱۱$$



تمرین ۶۸. در یک دنباله حسابی، جمله هفتم ۱۷ و جمله یازدهم ۳۷ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

تمرین ۶۹. چند عدد سه رقمی مضرب ۷ وجود دارد؟

تمرین ۷۰. دنباله‌ی  $125, x, 35, y, \dots$  یک دنباله حسابی است. مقدار  $y$  را حساب کنید.

مثال ۱۵: در یک دنباله حسابی داریم:  $a_1 + a_3 + a_5 = -15$  و  $a_2 + a_4 = -4$ . جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

$$a_1 + a_3 + a_5 = -15 \Rightarrow 3a_1 + 6d = -15$$

$$a_2 + a_4 = -4 \Rightarrow 2a_1 + 5d = -4$$

$$\Rightarrow d = 6, a_1 = -17 \Rightarrow a_n = 6n - 23$$

تمرین ۷۱. اگر در یک دنباله حسابی  $a_2 + a_7 = 14$  و  $a_2^2 - a_7^2 = 20$ ،  $a$  و  $d$  را بیابید.

تمرین ۷۲.  $a_m$  و  $a_n$  دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی می‌باشند. ( $m \neq n$ ) ثابت کنید:  $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

تمرین ۷۳. ثابت کنید در هر دنباله حسابی داریم:  $a_{n+k} - a_n = kd$

## تعریف واسطه حسابی

اگر  $a$ ،  $b$ ،  $c$  با همین ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند  $b$  را واسطه‌ی حسابی یا عددی بین  $a$  و  $c$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

نامند، می‌نویسیم:

درج  $k$  واسطه حسابی

در صورتی که بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  به تعداد  $k$  جمله بنویسیم به طوری که  $(k+2)$  جمله حاصل تشکیل دنباله‌ی

حسابی دهند، می‌توان قدرنسبت دنباله مطلوب را از رابطه  $d = \frac{b-a}{k+1}$  محاسبه کرده سپس واسطه‌ها را به دست آورد.

$b$ ،  $k$  واسطه‌ی حسابی  $a$ ،

تمرین ۷۴. درستی رابطه  $d = \frac{b-a}{k+1}$  را برای درج  $k$  واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  ثابت کنید.

مثال ۱۶: اعداد  $a, b, 2, 16$  به همین ترتیب تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. حاصل  $a+b$  را بیابید.

$$a = \frac{16+2}{2} = 9 \Rightarrow 2 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow b = -5 \Rightarrow a+b = +4$$

تمرین ۷۵. پنج واسطه‌ی حسابی بین دو عدد  $-8$  و  $22$  درج کنید.

تمرین ۷۶. بین ارقام  $11$  و  $111$  چند واسطه حسابی درج کنیم که بزرگ‌ترین آن‌ها از کوچک‌ترین آن‌ها  $92$  واحد بیش‌تر باشد.

تمرین ۷۷. اگر بین دو عدد ۸ و ۹۸ بتوانیم ۱۴ واسطه حسابی درج کنیم، جمله‌ی هفتم از جملات درج شده را بیابید.

تمرین ۷۸. عبارت‌های  $x^2 + 13$  و  $2x^2 + 3$  و  $x^2 + 1$ ، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. مقادیر  $x$  را بیابید.

$$a - d, a, a + d$$

مثال ۱۷: سه جمله متوالی در یک دنباله حسابی:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

پنج جمله متوالی در یک دنباله حسابی:

تمرین ۷۹. پنج عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی داده‌اند و عدد بزرگ‌تر برابر ۲۰ است. اگر مجموع این اعداد ۳۰ باشد، این ۵ عدد را بیابید.

### تعریف دنباله‌ی هندسی

دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول)، از ضرب کردن جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. پس می‌توان ساختار کلی یک دنباله‌ی هندسی را به صورت روبرو در نظر گرفت:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

پس  $t_n = ar^{n-1}$  جمله عمومی دنباله هندسی است که در آن  $a$  جمله اول و  $r$  قدرنسبت دنباله می‌باشد.

قدرنسبت هر دنباله‌ی هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله قبلی‌اش به دست می‌آید. یعنی:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

تمرین ۸۰. کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی‌اند؟ در هر مورد قدرنسبت را مشخص کنید و سپس جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

الف)  $5, 10, 20, \dots$

ب)  $18, 6, 2, \dots$

پ)  $4, 12, 48, \dots$

$$\sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \dots$$

تمرین ۸۱. اگر عبارت‌های  $2x+1$  و  $5x$  و  $12x-4$  جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $x$  را بیابید.

اگر  $a, b, c$  تشکیل دنباله‌ی هندسی دهند، آن‌گاه  $b^2 = ac$ ، در این صورت  $b$  را واسطه هندسی بین  $a$  و  $c$  گویند.



تمرین ۸۲. اگر جمله‌های سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ باشند، دنباله را مشخص کنید.

تمرین ۸۳. جمله‌ی چندم دنباله‌ی  $128, 64, 32, \dots$  برابر  $16^{-2}$  می‌باشد؟

تمرین ۸۴. اگر در یک دنباله‌ی هندسی، روابط زیر بین جملات برقرار باشد، قدرنسبت دنباله را بیابید.

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 5184 \quad a_3 \times a_5 = 576$$

تعریف واسطه‌ی هندسی: برای سه جمله‌ی متوالی  $a$  و  $b$  و  $c$  از یک دنباله‌ی هندسی  $b$  را واسطه‌ی هندسی بین  $a$  و  $c$  نامند،

$$b = \pm\sqrt{ac} \quad \text{در نتیجه } b^2 = ac \text{ و می‌توان نوشت:}$$

تمرین ۸۵. واسطه هندسی بین دو عدد ۳ و ۷۵ را بیابید.

تمرین ۸۶. بین دو عدد ۳ و ۲۱۸۷ پنج واسطه‌ی هندسی درج کنید.

تمرین ۸۷. بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید و دنباله‌های ایجاد شده را بنویسید.

تمرین ۸۸. اگر سه عدد تشکیل دنباله هندسی دهند به طوری که حاصل ضرب آن‌ها ۱۰۰۰ و حاصل جمع آن‌ها برابر ۳۵ شود آن‌ها را بیابید.

تمرین ۸۹. جملات پنجم، هفتم و یازدهم یک دنباله عددی، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

اگر جملات  $a_n, a_m, a_p$  سه جمله دلخواه از یک دنباله حسابی باشند تشکیل دنباله هندسی دهند، قدرنسبت این دنباله هندسی از رابطه  $r = \frac{p-m}{m-n}$  به دست می‌آید.

تمرین ۹۰. حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله هندسی  $1, 3, 9, 27, \dots$  را محاسبه کنید.

تمرین ۹۱. آرمان دوچرخه‌ای را به قیمت ۸۰۰ هزار تومان خریده است. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم در هر سال ۵ درصد نسبت به سال قبل کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از چهار سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت  $n$  سال، از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

درج  $k$  واسطه‌ی هندسی: اگر بخواهیم بین دو عدد  $a$  و  $b$  به تعداد  $k$  جمله بنویسیم (یعنی  $k$  واسطه هندسی قرار دهیم)

که  $k+2$  عدد حاصل دنباله‌ی هندسی دهند قدرنسبت دنباله را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$r = k + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

برای  $k$  های زوج:

$$r = \pm k + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

برای  $k$  های فرد:

$$r^{k+1} = \frac{b}{a}$$

زیرا:

## مسائل پایانی فصل اول

### بازه‌ها

مسئله ۱. حاصل هر یک از موارد زیر را به صورت یک بازه به دست آورید.

$$\text{الف) } \left[-4, \frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{27}{8}, \sqrt{13}\right] =$$

$$\text{ب) } \left(-\frac{7}{3}, 2\sqrt{2}\right] \cup \left(0, \sqrt{2}\right) - \left[\sqrt{2}, \sqrt{8}\right] =$$

مسئله ۲. مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{N}$  را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

مسئله ۳. اگر  $A = [3, 7]$  و  $B = (-2, 4]$  و  $C = [-3, 5)$  باشد، حاصل هر یک از موارد زیر را بیابید.

$$\text{الف) } A \cap B = \quad \text{ب) } A - B = \quad \text{پ) } (A \cup B) \cap C = \quad \text{ت) } A \cup B =$$

مسئله ۴. مجموعه  $\mathbb{R} - \{2, 0, 3\}$  را به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.

مسئله ۵. طول کدام بازه از سایر بازه‌ها کوچک‌تر است؟

$$\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{6}\right) \quad (۴)$$

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad (۳)$$

$$[-2, 1) - \{0\} \quad (۲)$$

$$[-1, 2) \quad (۱)$$

مسأله ۶. اگر مجموعه جواب نامعادله  $x - 1 < 2 - 2x < x - \frac{1}{2}$  به صورت بازه  $(a, b)$  نوشته شود، طول این بازه کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

مسأله ۷. اشتراک و اجتماع بازه‌های  $(1, 3]$  و  $(-3, 1)$  به ترتیب شامل چند عدد صحیح است؟

مسأله ۸. چند بازه به صورت  $(\frac{2}{n+\delta}, \frac{2}{n})$  شامل عدد  $0.2$  وجود دارد؟  $(n \in \mathbb{N})$

مسأله ۹. با فرض  $A_n = \left[-\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right]$ ، حاصل  $A_1 \cup A_2$  و  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  را بیابید.

مسأله ۱۰. چند بازه به صورت  $(\frac{2}{k+\delta}, \frac{2}{k})$  شامل عدد  $0.2$  وجود دارد؟  $(k \in \mathbb{N})$

مسأله ۱۱. هر یک از اعداد زیر را به بازه‌هایی که به آن تعلق دارند وصل کنید.

عدد آووگادرو  $6.02 \times 10^{23}$   $(-\infty, 10^{23}]$

ثابت کولن  $8/99 \times 10^9$   $[0, 1]$

ضریب خازن  $8/85 \times 10^{-12}$   $[10^{23}, 10^{24}]$

$4\pi \times 10^{-7}$   $[10^{-12}, 10^{-7}]$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مسأله ۱۲. کدام مجموعه با پایان (متناهی) می‌باشد؟

$$W \cup N \quad (۴)$$

$$\mathbb{Z} - W \quad (۳)$$

$$W - N \quad (۲)$$

$$\mathbb{Z} \cap W \quad (۱)$$



مسأله ۱۳. متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تمام مضارب طبیعی ۱۰

ب) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۱۰۰

پ) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر از  $1000 \cdot 1000$

ت) مجموعه اعداد طبیعی که ۲۱ بر آن‌ها بخش‌پذیر است.

ث) مجموعه اعداد طبیعی که بر ۲۱ بخش‌پذیرند.

$$\text{ج) } (Q \cap N) - W$$

$$\text{چ) } \mathbb{R} - (Q' - Q)$$

$$\text{ح) } (Z - W) \cup N$$

متمم یک مجموعه

مسأله ۱۴. طرف دوم تساوی‌های زیر را تعیین کنید.

$$۱) (U - A)' \cup (U \cap A)' =$$

$$۲) (U \cap \emptyset)' - (U \cap A \cap A)' =$$

$$۳) (A - A') \cup (A' - A) =$$

$$۴) U - A =$$

مسأله ۱۵. با فرض این‌که مجموعه مرجع  $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 25\}$  و  $A = \{x \in U | x < 11\}$  و

$B' = \{x \in U, 4 \leq x < 25\}$ ، اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) A'$$

$$۲) B$$

$$۳) A' \cup B'$$

$$۴) (A \cap B)'$$

$$۵) A \cap B'$$

$$۶) A' \cap B$$

مسئله ۱۶. اگر  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع و مجموعه  $A_k$  به صورت  $A_k = [-k, k]$  تعریف شده باشد متهم هر یک از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

- ۱)  $A_1 \cup A_2$                       ۲)  $A_1 \cup A_1$                       ۳)  $A_1'$   
 ۴)  $A_1 \cdot -A_2$                       ۵)  $A_1 - A_2'$

مسئله ۱۷. در صورتی که مجموعه مرجع  $U$  برابر اعداد طبیعی یک رقمی بوده و  $A = \{a^b \mid a, b \in \mathbb{N}, a + b = 5\}$ ، در این صورت  $A'$  را مشخص کنید.

مسئله ۱۸. اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت  $W'$  را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

مسئله ۱۹. در هر یک از موارد زیر، طرف دوم تساوی را تعیین کنید.

الف)  $\mathbb{N} - \mathbb{Z} =$

ب)  $\mathbb{Z} - \mathbb{W} =$

پ)  $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})' =$

ت)  $([1, 3] \cup [2, 10])' =$

محاسبه عدد اصلی یا تعداد اعضای مجموعه

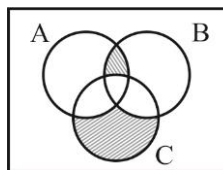
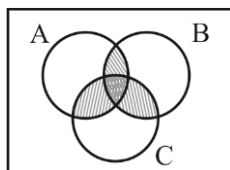
مسئله ۲۰. اگر  $A = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{25}\}$  و  $B = \{1, 1^2, 1^3, \dots, 1^{25}\}$ ، در این صورت  $A \cup B$  دارای چند عضو است؟

مسئله ۲۱. اگر مجموعه مرجع، ۱۳ عضو و مجموعه  $A$  پنج عضو بیش‌تر از مجموعه  $A'$  داشته باشد.  $A$  چند عضو دارد؟

مسئله ۲۲. از ۵۶ نفری که از یک فروشگاه خرید کرده‌اند، ۲۳ نفر از محصولات شرکت A و ۲۵ نفر از محصولات شرکت B و ۱۸ نفر فقط از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. چند نفر، از هیچ کدام از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

مسئله ۲۳. در صورتی که مجموعه A دارای ۱۴ عضو و مجموعه B دارای ۱۷ عضو و مجموعه  $(A - B) \cup (B - A)$  دارای ۲۱ عضو باشد،  $A \cup B$  چند عضو دارد؟

مسئله ۲۴. مجموعه‌های هاشورخورده در نمودار ون را با نمادهای ریاضی نشان دهید.



مسئله ۲۵. در یک نظرخواهی از ۳۲۰ دانش‌آموز البرزی مشخص شد که ۲۰ درصد از دانش‌آموزان در کلاس‌های المپیاد شرکت می‌کنند. از این شرکت‌کنندگان ۴۰ درصد به شرکت در کلاس‌های فیزیک جواب مثبت داده‌اند و ۱۶ نفر در کلاس‌های ریاضی شرکت می‌کنند. تعیین کنید:

الف) چند دانش‌آموز در کلاس‌های المپیاد شرکت نداشته‌اند؟

ب) دست کم چند دانش‌آموز در یکی از کلاس‌ها شرکت کرده‌اند؟

پ) چند دانش‌آموز از هر دو کلاس بهره برده‌اند؟

ت) چند دانش‌آموز فقط در کلاس‌های فیزیک شرکت داشته‌اند؟

مسئله ۲۶. فرمول تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه را بیابید.

مسأله ۲۷. اگر  $U$  مجموعه مرجع بوده و  $A, B \subseteq U$  و داشته باشیم:

$$n((A \cup B)') = 20, n(B - A) = 30, n(A \cap B) = 10, n(A) = 30$$

مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از موارد زیر:

الف) $n(A \cup B)$	ب) $n(U)$	پ) $n(A - B)$	ت) $n(B')$
--------------------	-----------	---------------	------------

مسأله ۲۸. در یک آموزشگاه زبان ۲۰۰ دانشجو حضور دارند. ۸۰ نفر در کلاس اسپانیایی، ۹۰ نفر انگلیسی و ۱۳۰ نفر فرانسه ثبت‌نام کرده‌اند. ۵۰ نفر در هر دو کلاس اسپانیایی و انگلیسی، ۵۰ نفر اسپانیایی و فرانسه‌وی، ۶۰ نفر انگلیسی و فرانسه ثبت نام کرده‌اند و ۳۰ نفر هم در هیچ کدام از سه زبان فوق ثبت‌نام نکرده‌اند. در این صورت:

الف) چند نفر حداقل در یکی از سه زبان ثبت‌نام کرده‌اند؟

ب) چند نفر هر سه زبان را ثبت‌نام کرده‌اند؟

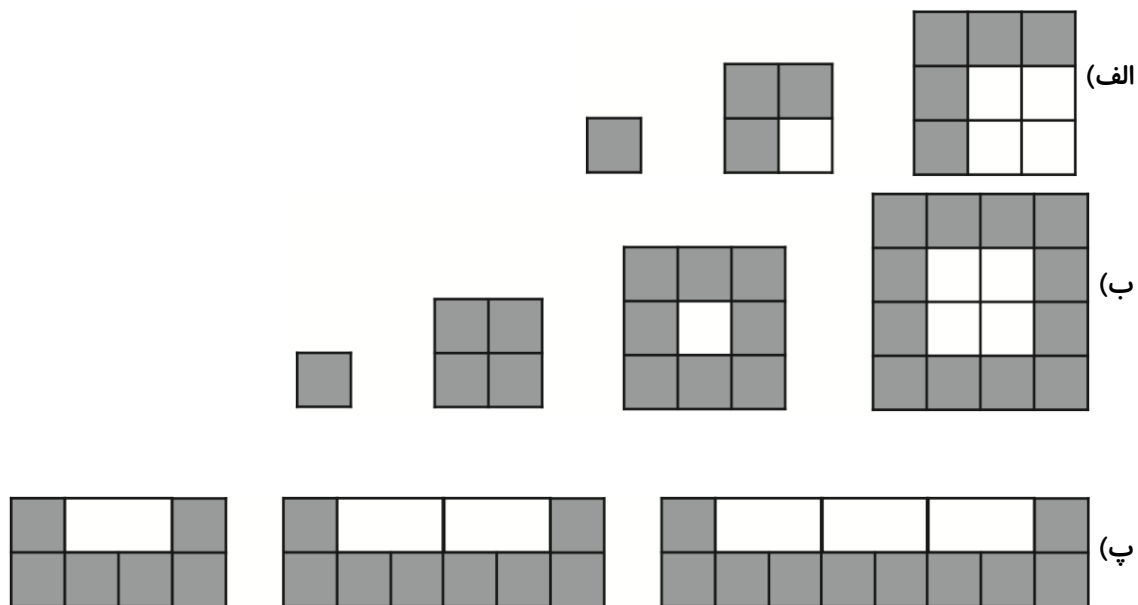
پ) چند نفر فقط در زبان فرانسه ثبت‌نام کرده‌اند؟

مسأله ۲۹. در یک باشگاه ورزشی که ۴۵ عضو دارد ۲۲ نفر در شنا و ۲۱ نفر در اسب‌سواری و ۲۴ نفر در دو و میدانی عضو هستند. اگر بدانیم ۷ نفر هم در شنا و هم در اسب‌سواری و ۹ نفر هم در شنا و هم در دو میدانی و ۱۰ نفر در اسب‌سواری و دو و میدانی عضو باشند. مطلوب است محاسبه‌ی تعداد افرادی که عضو هر سه رشته هستند؟

مسأله ۳۰. در یک کلاس ۵۰ نفری از یک دبیرستان، اگر ۲۸ نفر علاقمند به ورزش فوتبال و ۱۴ نفر از دانش‌آموزان کلاس فقط والیبال بازی کنند و اگر ۸ نفر هیچ‌کدام را بازی نکنند، حداقل چند نفر در هر دو رشته بازی می‌کنند؟

الگو و دنباله

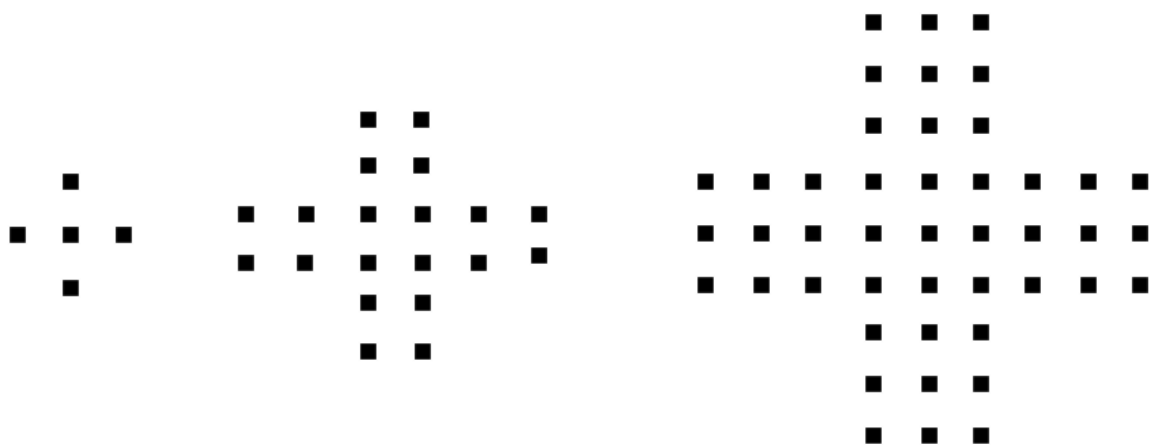
مسأله ۳۱. در هر یک از الگوهای هندسی زیر، تعداد مربع‌های رنگی را تعیین کنید.



۶ کاشی رنگی و ۱ کاشی سفید

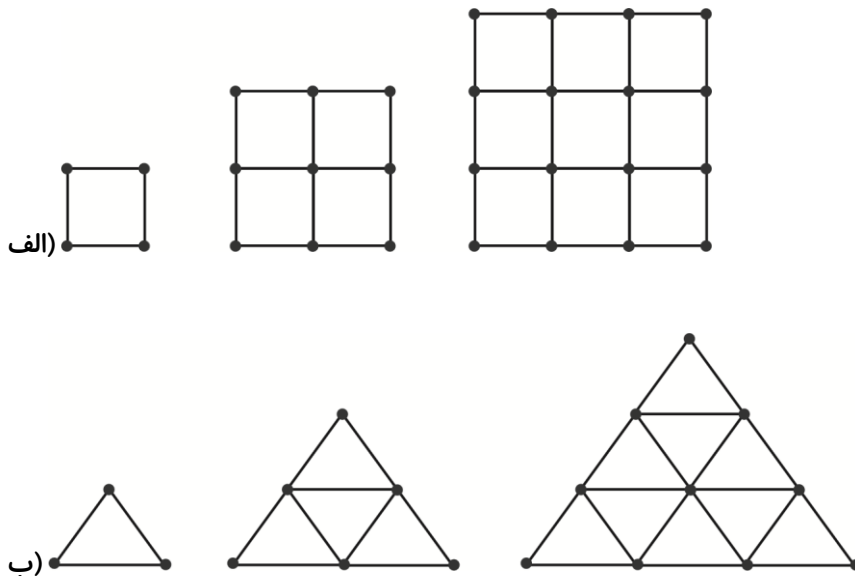
۸ کاشی رنگی و ۲ کاشی سفید

۱۰ کاشی رنگی و ۳ کاشی سفید



(ت)

مسأله ۳۲. در هر یک از شکل‌های زیر دنباله‌ی تعداد پاره‌خط‌های واحد موجود در هر شکل را مشخص و جمله‌ی عمومی آن را بیابید.



مسأله ۳۳. هر کدام از الگوهای عددی زیر مثال‌هایی برای دنباله محسوب می‌شوند. جمله عمومی هر دنباله و سه جمله بعدی بنویسید.

الف)  $1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{3}, \dots$

ب)  $1, 8, 27, 64, \dots$

پ)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

ت)  $0/9, 0/09, 0/009, 0/0009, \dots$

ث) دنباله لوکا  $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

مسأله ۳۴. اگر  $a_n$  و  $b_n$  دو جمله عمومی با الگوی خطی باشند، ثابت کنید دنباله‌های  $a_n + b_n$  و  $a_n - b_n$  و  $ca_n$  نیز دارای الگوی خطی هستند. ( $c \in \mathbb{R}$ )

مسأله ۳۵. کدام جمله‌ی دنباله  $a_n = \frac{3^{n+1}}{9^n + 2}$  برابر با  $\frac{27}{83}$  است؟

مسأله ۳۶. کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی  $a_n = n^2 - 8n + 9$  را تعیین کنید.

مسأله ۳۷. چهار جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر را که جمله عمومی آن‌ها داده شده است بنویسید.

الف)  $a_n = 2^{n-1}$

ب)  $a_n = 2n - \frac{1}{n}$

پ)  $a_n = \frac{n^2}{2n}$

مسأله ۳۸. جمله چندم دنباله‌ی  $a_n = \frac{n^3 + 5n^2}{n + 5}$  برابر با ۱۶ است؟

تمرین ۳۹. داستان خرگوش های فیبوناچی: فرض کنید فیبوناچی یک جفت خرگوش نوزاد به شما هدیه نروزی داده است. این خرگوش ها در یک ماهگی بالغ و باردار می شوند و دوران بارداری آن ها یک ماه طول می کشد و در هر بارداری خرگوش ماده یک دوقلوی نر و ماده به دنیا می آورد. اگر این خرگوش ها هرگز نمیرند، در این صورت در پایان سال شما چند جفت خرگوش دارید؟

### دنباله ی حسابی

مسأله ۴۰. در دنباله ی حسابی  $2, 9, 16, \dots$ ، تعداد جملات مثبت کوچک تر از ۳۰۰ را بیابید.

مسأله ۴۱. بین دو عدد  $-1$  و  $19$ ، چهار عدد چنان درج کنید که شش عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مسأله ۴۲. نشان دهید هر دنباله عددی، یک الگوی خطی است و برعکس.

مسأله ۴۳. اگر دنباله  $\dots, 4x, 6, y, x$ ، یک دنباله حسابی باشند، مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید.



مسأله ۴۴. اگر سه عدد  $a, b, c$  سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند نشان دهید که:  $b = \frac{a+c}{2}$

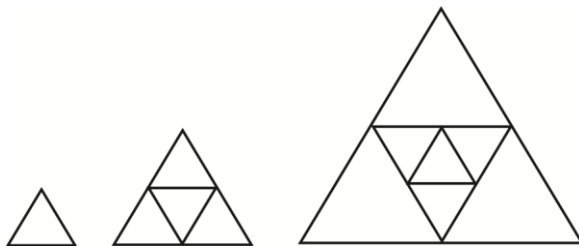
مسأله ۴۵. چه رابطه‌ای بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه برقرار باشد تا سه ضلع آن تشکیل یک دنباله حسابی دهند؟

مسأله ۴۶. مجموع چهار جمله متوالی یک دنباله عددی برابر ۲۰ و حاصل ضرب آن‌ها ۶۲۵ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

مسأله ۴۷. مقدار  $x$  را طوری بیابید که اعداد  $x+5$  و  $4x+3$  و  $8x-2$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند.

مسأله ۴۸. مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی داده‌اند برابر ۳۳ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۸۷ است. این اعداد را بیابید.

مسأله ۴۹. در شکل‌های زیر تعداد مثلث‌های موجود در هر شکل را که از بهم وصل کردن وسط اضلاع درونی‌ترین مثلث پدید می‌آیند می‌یابد، در نظر بگیرید. تعداد مثلث‌های موجود در مرحله‌ی  $n$  ام را بیابید.



$a_1 = 1$  تعداد مثلث‌ها

$a_2 = 5$

$a_3 = 9$

مسأله ۵۰. شمع A به طول ۵۰ سانتی‌متر، در هر ساعت ۶ سانتی‌متر سوخته و کوتاه می‌شود و شمع B به طول ۳۰ سانتی‌متر در هر ساعت ۲ سانتی‌متر سوخته و کوتاه می‌شود.

الف) پس از چند ساعت سوختن طول دو شمع یکسان خواهد شد؟

ب) هر یک از شمع‌ها پس از چند ساعت سوختن تمام می‌شود؟

پ) الگوی ریاضی کوتاه شدن شمع‌ها را بنویسید.

ت) الگوی ریاضی طول باقیمانده هر شمع را بدست آورید.

مسأله ۵۱. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله متوالی اول آن برابر ۱۵ و مجموع جملات یازدهم و دوازدهم و سیزدهم آن برابر ۶۳ است. جمله عمومی دنباله را بیابید.

مسأله ۵۲. در یک دنباله‌ی حسابی ۱۳ جمله‌ای، مجموع سه جمله اول آن، برابر با ۱۵۰ و مجموع سه جمله آخر آن، برابر ۱۲ است. این دنباله را مشخص کنید.

مسأله ۵۳. اگر مجموع و تفاضل جملات دوازدهم و هشت یک دنباله حسابی به ترتیب برابر با ۴۸ و ۳۲ باشند، جمله عمومی دنباله را بیابید.

مسئله ۵۴. ثابت کنید در دنباله‌ی حسابی اگر  $y = \frac{x+z}{2}$ ، آن‌گاه  $a_y = \frac{a_x + a_z}{2}$ .

مسئله ۵۵. ثابت کنید در دنباله‌ی حسابی اگر  $p+q=r+s$ ، آن‌گاه  $a_p + a_q = a_r + a_s$  و بر عکس.

### دنباله‌ی هندسی

مسئله ۵۶. اگر مجموع دو عدد، برابر ۲۶ و تفاضل واسطه هندسی از واسطه حسابی آن‌ها برابر ۸ باشد، آن دو عدد را بیابید.

مسئله ۵۷. چهار واسطه هندسی بین دو عدد ۱۲۵ و  $\frac{1}{4}$  بنویسید.

مسئله ۵۸. پدر علی قرار است این ماه مبلغی را به او بپردازد و در ماه‌های بعد، هر ماه ده درصد بیشتر از ماه قبلی به او بپردازد.

الف) دریافتی‌های هر ماه علی چه دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

ب) در صورت وجود، قدرنسبت و جمله عمومی آن را بیابید.

مسئله ۵۹. پدر امین قرار است این ماه مبلغی را به او بپردازد و در ماه‌های بعد، هر ماه ۵ درصد ماه اول را به ماه قبلی اضافه کرده و به او بپردازد. دریافتی‌های هر ماه امین دنباله‌ای تشکیل می‌دهند.

الف) این دنباله چه نوع دنباله‌ای است؟

ب) جمله عمومی آن را بیابید.

مسأله ۶۰. قیمت اتومبیلی ۳۶ میلیون تومان خریده شده است. اگر ثبت آن هر سال ۵ درصد کم شود، پس از پنج سال قیمت اتومبیل چقدر خواهد شد؟ قیمت اتومبیل پس از  $n$  سال چقدر است؟

مسأله ۶۱. اگر  $a^2$  و  $b^2$  و  $c^2$  تشکیل یک دنباله عددی بدهند، ثابت کنید اعداد  $\frac{1}{a+b}$ ،  $\frac{1}{a+c}$ ،  $\frac{1}{b+c}$  نیز تشکیل دنباله عددی می‌دهند.

مسأله ۶۲. پدری یک پسر و یک دختر دارد. پسر، کوچک‌تر از دختر است. سن این سه نفر تشکیل دنباله هندسی می‌دهد. اگر سن دختر را ۱۲ سال بیشتر کنیم دنباله جدید می‌شود. اکنون اگر ۹۶ سال به سن پدر اضافه کنیم، دنباله هندسی می‌شود. سن فعلی هر یک را بیابید.

مسأله ۶۳. مجموع جملات اول و چهارم یک دنباله هندسی برابر ۵۶ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن برابر ۲۴ است. دنباله را مشخص کنید.

مسأله ۶۴. در یک دنباله هندسی داریم  $t_3 \times t_5 = 16$  و  $t_1 \times t_7 = 4$  و جملات همگی مثبت‌اند. این دنباله را مشخص کنید.

مسأله ۶۵. اگر ریشه معادله  $6x - 2 = 2x + 3$  جمله ششم یک دنباله هندسی باشد و  $t_3 = \sqrt{2}$ ، جمله نهم دنباله را به دست آورید.

مسأله ۶۶. توپی پس از زمین خوردن از هر ارتفاعی به اندازه‌ی  $\frac{1}{4}$  ارتفاع اولیه بالا می‌رود. فرض کنیم این توپ را از ارتفاع ۵ متری رها کرده‌ایم. ارتفاع توپ را پس از هر برخورد با زمین به صورت یک دنباله نوشته و جمله عمومی آن را بدست آورید.

مسأله ۶۷. در یک دنباله هندسی  $a_4 \times a_1 = \frac{1}{16}$ ، حاصل ضرب سیزده جمله اول را مشخص کنید. جمله هفتم این دنباله چند است؟

مسأله ۶۸. بین دو عدد ۱۶ و  $\frac{1}{64}$ ، نه واسطه هندسی درج کرده‌ایم. قدرنسبت این دنباله را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

مسأله ۶۹. نشان دهید ریشه‌های معادله‌ی  $x^3 - 7x^2 + 7x - 1 = 0$  تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

مسأله ۷۰. در دنباله‌ی هندسی  $\dots, b, a+b, 4a, b$ ، اگر جمله هفتم برابر  $\frac{5}{8}a$  باشد،  $a$  چقدر است؟

مسأله ۷۱. در یک دنباله هندسی  $a_2 + a_3 + a_4 = 3$  و  $a_4 - a_1 = 1$  است. قدرنسبت این دنباله چیست؟

مسأله ۷۲. در دو دنباله عددی و هندسی، جملات اول با هم برابرند و جمله دوم دنباله هندسی با مجموع دو جمله‌ی اول دنباله عددی برابر است. اگر جمله سوم دنباله هندسی با مجموع ۴ جمله اول دنباله عددی برابر باشد، قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

مسأله ۷۳. سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی، به ترتیب جملات دوم، پنجم و دوازدهم یک دنباله حسابی‌اند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی چقدر است؟

مسأله ۷۴. جملات اول دو دنباله عددی و هندسی با هم برابرند و جملات دهم و بیستم دنباله حسابی، به ترتیب با جملات دوم و چهارم دنباله‌ی هندسی برابر هستند. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

مسأله ۷۵. نشان دهید که اگر جملات  $t_m, t_n, t_p$  از یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند

$$r = \frac{p-n}{n-m}$$

قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

مسأله ۷۶. ثابت کنید اگر در یک دنباله هندسی داشته باشیم  $y = \frac{x+z}{2}$ ، آن‌گاه خواهیم داشت  $a_y^2 = a_x \cdot a_z$ .

مسأله ۷۷. ثابت کنید اگر در یک دنباله هندسی داشته باشیم  $p+q = n+m$ ، آن‌گاه خواهیم داشت  $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$  و بر عکس.

## تست‌های فصل اول

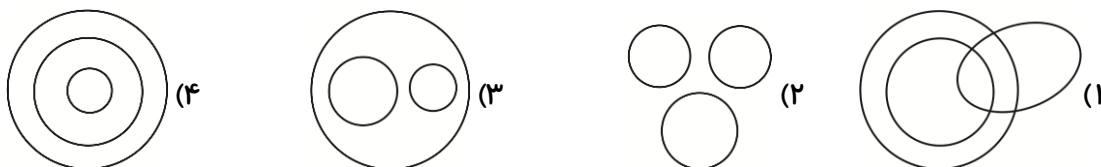
۱. اگر  $\mathbb{Z}$  مجموعه مرجع و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های آن باشند و  $A'$  نامتناهی و  $B$  متناهی باشد، آن گاه کدام یک از مجموعه‌ها ممکن است متناهی باشد؟

- $A' - B$  (۴)       $A' \cup B'$  (۳)       $B' \cap A$  (۲)       $B \cup A'$  (۱)

۲. چه تعداد از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) اگر  $x \in A \cup B$  آن گاه  $x \in A$ .  
 ب) اگر  $x \in B'$  آن گاه  $x \in (A \cap B)'$ .  
 ج) اگر  $x \in A \cap B$  آن گاه  $x \in A \cup B$ .  
 د) اگر  $x \in A \cap B'$  آن گاه  $x \in A$ .
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۳. کدام نمودار زیر بهترین ارتباط بین ۳ مجموعه‌ی زنان، مادران و مهندسان را نشان می‌دهد؟



۴. اگر داشته باشیم  $A = \left\{ \begin{matrix} \frac{n(n-1)}{2} \\ (-1)^n \end{matrix} \mid n \in \mathbb{W} \right\}$  و  $B = (-2, 2]$ ، آن گاه  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      بی‌نهایت (۴)

۵. اگر  $A \subseteq B$ ، حاصل عبارت  $(A - B') \cup (B - A)$  کدام است؟

- $A$  (۱)       $A'$  (۲)       $B$  (۳)       $B'$  (۴)

۶. کلاسی شامل ۳۰ دانش آموز است. ۵ نفر از آن‌ها فقط در درس فیزیک تجدید شده‌اند و ۷ نفر فقط در درس شیمی. اگر ۱۵ نفر در هر دو درس قبول شده باشند، چند نفر در هر دو درس هر مردود شده‌اند؟

- ۶ (۱)                      ۵ (۲)                      ۴ (۳)                      ۳ (۴)

۷. اگر  $(A - B) \cap (B - A) = A$  باشد کدام گزینه درست نیست؟

- $A \cup \emptyset = \emptyset$  (۱)                       $A \cap B = \emptyset$  (۲)                       $B - A = \emptyset$  (۳)                       $A \cap B' = \emptyset$  (۴)

۸. حاصل عبارت  $(A - (A - B)) \cup (B \cap (A'))$  کدام است؟

- $A - B$  (۱)                       $A'$  (۲)                       $B$  (۳)                       $A \cup B$  (۴)

۹. در مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  چند عدد فقط بر یکی از اعداد ۵ یا ۷ بخشپذیر است؟

- ۲۱۴ (۱)                      ۲۵۲ (۲)                      ۲۸۶ (۳)                      ۱۵۲ (۴)

۱۰. در یک کلاس ۲۵ نفری، دانش آموزان در ۳ کلاس فوق برنامه شرکت کرده‌اند. اگر آن‌ها بتوانند در بیش از یک کلاس ثبت‌نام کنند و در هر یک از کلاس‌ها به ترتیب ۱۸ و ۲۰ و ۲۲ نفر شرکت کرده باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) همه‌ی دانش آموزان حداقل در یک کلاس ثبت‌نام کرده‌اند.  
 (۲) حداقل ۱۰ نفر در هر ۳ کلاس ثبت‌نام کرده‌اند.  
 (۳) حداقل ۵ نفر در هیچ کلاسی ثبت‌نام نکرده‌اند.  
 (۴) حداکثر ۱۵ نفر در بیش از یک کلاس ثبت‌نام کرده‌اند.

۱۱. کدام مجموعه متناهی است؟

- (۱)  $(1/1, 1/2)$                       (۲) عددهای گویا بین ۱ و ۲  
 (۳) عددهای گنگ بین ۱ و ۲                      (۴) عددهای بین ۱ و ۲ که ده برابرشان عددی طبیعی است.



۱۲. به ازای کدام مقدار گویای  $a$ ، عدد  $\sqrt{1+a}$  نیز گویا است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$       (۲)  $\frac{7}{36}$       (۳)  $\frac{11}{25}$       (۴)  $\frac{25}{49}$

۱۳. اگر  $U_{2n} = \frac{1}{4n^2}$  باشد، آنگاه  $U_n$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{n^2}$       (۲)  $\frac{1}{2n}$       (۳)  $n^2$       (۴)  $2n^2$

۱۴. جمله عمومی دنباله  $\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{18}, \frac{1}{28}, \dots$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2n^2+2}$       (۲)  $\frac{1}{t_{n-1}+n+5}$       (۳)  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$       (۴)  $\frac{1}{n(n+3)}$

۱۵. در یک دنباله عددی  $t_1 + t_4 + t_7 = 8$  و  $t_4 + t_7 + t_{10} = 2$  است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $-2$       (۳)  $-\frac{2}{3}$       (۴)  $2$

۱۶. اعداد  $2x+3$  و  $3x+4$  و  $5x-1$  سه جمله متوالی یک دنباله عددی هستند. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱)  $4$       (۲)  $5$       (۳)  $6$       (۴)  $7$

۱۷. اگر در یک دنباله عددی  $t_1 = 170$  و  $t_r = 161$ ، آنگاه  $r$ ؟؟؟ جمله این دنباله مثبت است؟

- (۱)  $17$       (۲)  $18$       (۳)  $19$       (۴)  $20$

۱۸. بیست جمله اول یک دنباله عددی با جمله اول  $t_1 = 2$  و قدرنسبت  $d_1 = 3$  و بیست جمله اول دنباله عددی دیگری با

جمله اول  $s_1 = 3$  و قدرنسبت  $d_2 = 2$  چند جمله مشترک دارند؟

- (۱)  $6$       (۲)  $7$       (۳)  $8$       (۴)  $9$

۱۹. جمله  $n$ ام یک دنباله عددی که در آن  $t_1 = 5$  و  $d = 3$ ، چقدر از جمله  $n$ ام دنباله عددی دیگری که در آن  $t_1 = 4$  و  $d' = 3$  است بزرگتر است؟

(۱) ۱ (۲)  $n+1$  (۳)  $n$  (۴)  $n-1$

۲۰. در یک دنباله هندسی  $a_5 = 2a_4$ . جمله اول دنباله کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)  $2\sqrt{2}$

۲۱. در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲، حاصل  $\frac{a_1 a_7}{a_4^2}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{16}$  (۲) ۱۶ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) ۴

۲۲. بزرگترین جمله دنباله هندسی  $\frac{1}{24}, d, c, \frac{1}{3}, b, a$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $\frac{8}{3}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۳. در یک دنباله هندسی صعودی، جمله سوم برابر ۱- و جمله هفتم برابر ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

(۱)  $\sqrt{5}$  (۲) ۲۵ (۳) ۵ (۴)  $\frac{5}{4}$

۲۴. در یک دنباله عددی، جملات  $t_3, t_7, t_9$  می توانند سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله عددی برابر صفر است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۲۵. اگر  $a, b, c$  به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی دهند، حاصل  $\frac{a^2 + b^2 + a}{c^2 + b^2 + c}$  همواره کدام است؟

- (۱)  $\frac{a}{c}$       (۲)  $\frac{c}{a}$       (۳) ۱      (۴) -۱

۲۶. اگر  $x > 0$ ، جمله پنجم دنباله هندسی  $\dots, x+1, \sqrt{x}, x-1$  برابر با ۸۱ است؟

- (۱)  $n=9$       (۲)  $n=8$       (۳)  $n=7$       (۴)  $n=6$

۲۷. اعداد  $x-2, y+2, 3x, x+z$ ، جملات متوالی یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی هستند. حاصل  $\frac{x^2 + y^2}{z}$

کدام است؟

- (۱) -۸      (۲) ۶      (۳) -۱۳      (۴) ۱۴

۲۸. حاصل ضرب  $n$  جمله اول دنباله هندسی با قدر نسبت  $r$  کدام است؟

- (۱)  $a_1^n \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$       (۲)  $a_1 \cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$       (۳)  $a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$       (۴)  $a_1 \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\begin{cases} 3, 7, 11, \dots \\ 1, 4, 7, \dots \end{cases}$

۲۹. جمله عمومی دنباله جملات مشترک دو دنباله روبه‌رو کدام است؟

- (۱)  $10n+3$       (۲)  $12n-5$       (۳)  $6n+4$       (۴)  $8n-1$